

双像解析的空间后方交会——前方交会解法

一个立体像对

单张像片空间后方交会：

左片 X_{S_1} 、 Y_{S_1} 、 Z_{S_1} 、 φ_1 、 ω_1 、 κ_1

右片 X_{S_2} 、 Y_{S_2} 、 Z_{S_2} 、 φ_2 、 ω_2 、 κ_2

立体像对前方交会

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = R_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = R_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix}$$

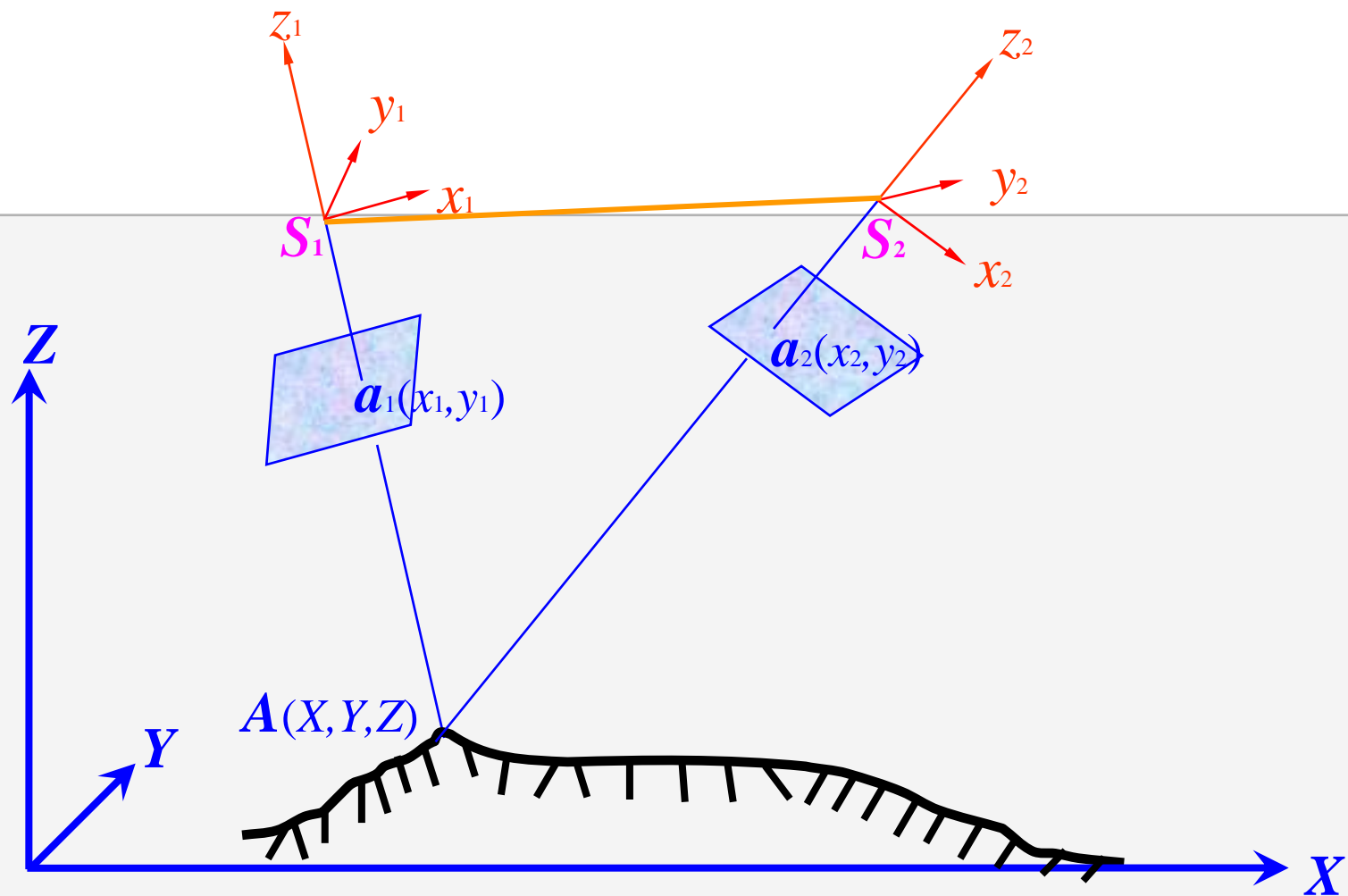
$$N_1 = \frac{B_u w_2 - B_w u_2}{u_1 w_2 - u_2 w_1}$$

$$N_2 = \frac{B_u w_1 - B_w u_1}{u_1 w_2 - u_2 w_1}$$

$$X_A = X_{S_1} + N_1 u_1 = X_{S_2} + N_2 u_2$$

$$Y_A = \frac{1}{2}[(Y_{S_1} + N_1 v_1) + (Y_{S_2} + N_2 v_2)]$$

$$Z_A = Z_{S_1} + N_1 u_1 = Z_{S_2} + N_2 w_2$$



描述立体像对中两张像片相对位置和姿态?

$$X_{S_1}, Y_{S_1}, Z_{S_1}, \varphi_1, \omega_1, \kappa_1$$

$$X_{S_2}, Y_{S_2}, Z_{S_2}, \varphi_2, \omega_2, \kappa_2$$

摄影过程的“反转”——由“摄影”——→“投影”

左影像

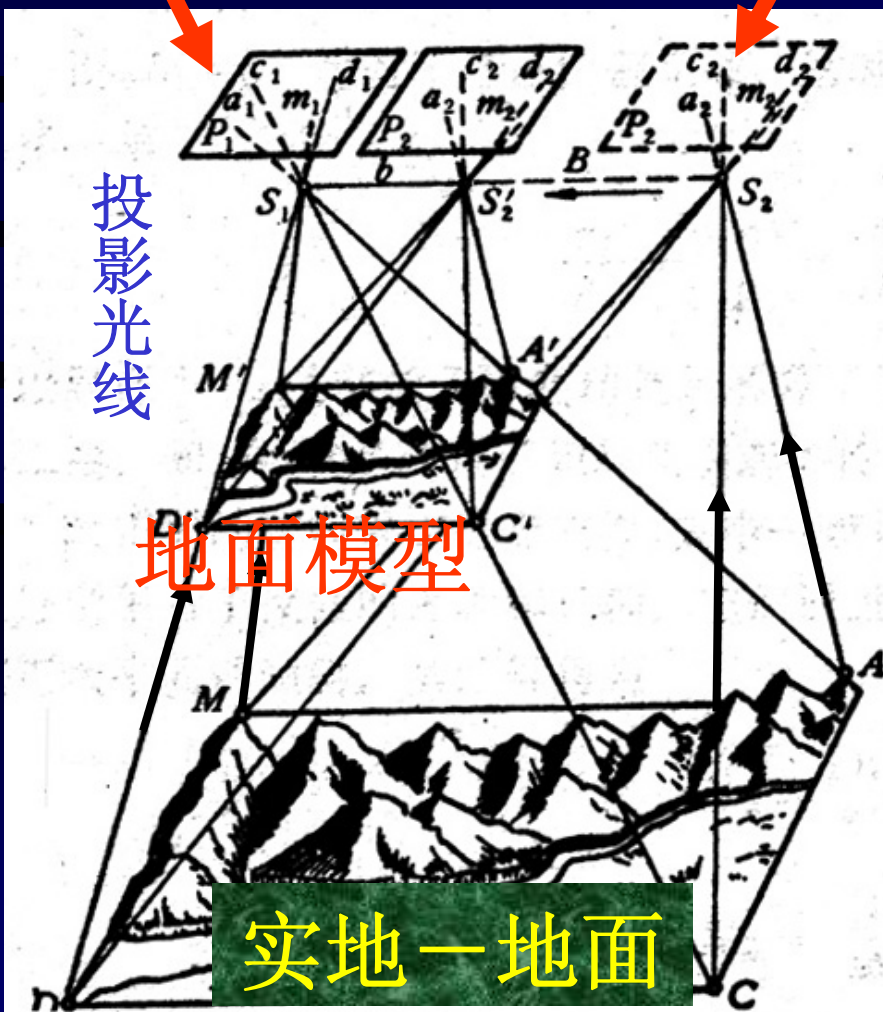
右影像

投影光线

摄影光线

地面模型

实地—地面



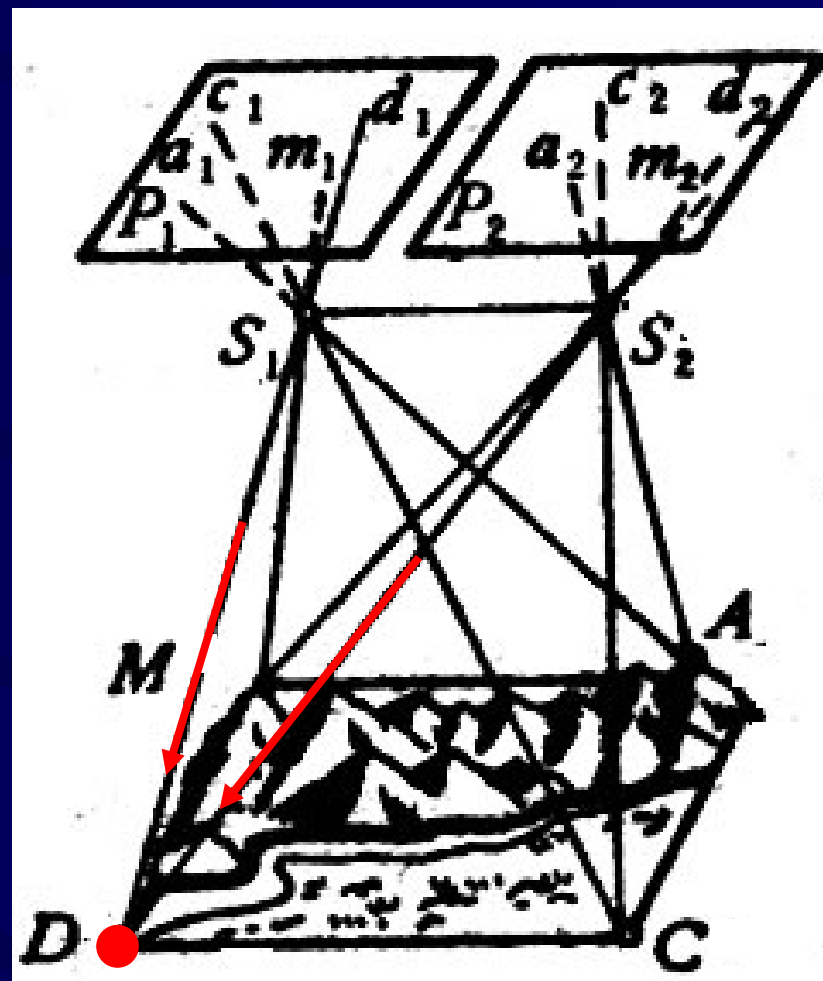
建立“空间几何立体模型”

光线在空间
对对相交

如何
确定两张影像的
相对位置？

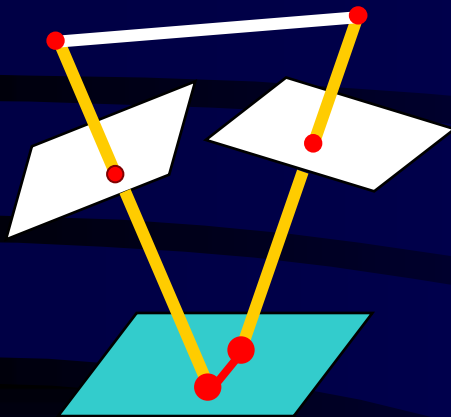
相对定向

确定两张影像的
相对位置



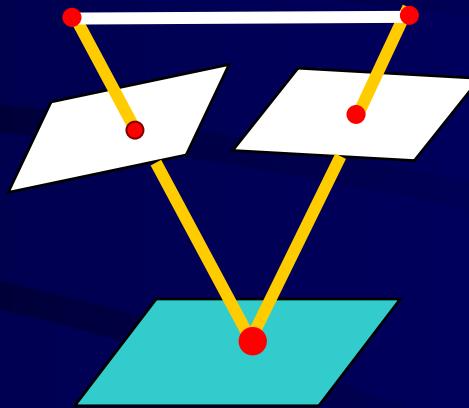
相对定向的过程

初始状态



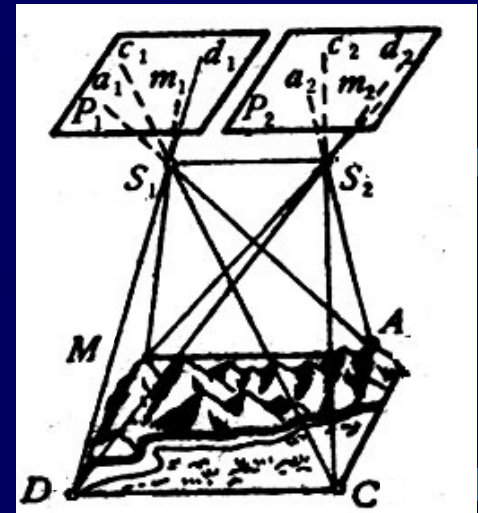
投影光线
不相交
—交叉

中间状态



改变立体像片
对的相对位
置，使光线相
交

最终状态



所有光线
对对相交

§ 5—4 立体像对的解析法相对定向

- 用立体像对确定地面点坐标的另一途径：

先恢复两张像片的相对位置和姿态（相对定向）建立起立体模型 \longrightarrow 再恢复立体模型的绝对方位（绝对定向）

一、解析法相对定向：通过计算相对定向元素建立地面立体模型

目的：恢复两张像片的相对位置和姿态，使同名光线对对相交

相对定向元素：确定立体像对中两张像片相对位置和姿态关系的参数

怎样描述相对方位？以两像片各自相对于选定的同一像空间辅助坐标系的关系来讨论两像片的相对方位

“相对方位元素”：像片在像空间辅助坐标系的

✓位置： X_s 、 Y_s 、 Z_s

✓姿态： φ 、 ω 、 κ

像空间辅助坐标系有不同的定义方法

■像空间辅助坐标系（右） $S-u-v-w$

作用：为方便计算，建立的一种相对统一的坐标系（过渡性坐标系）

原点：摄影中心 S

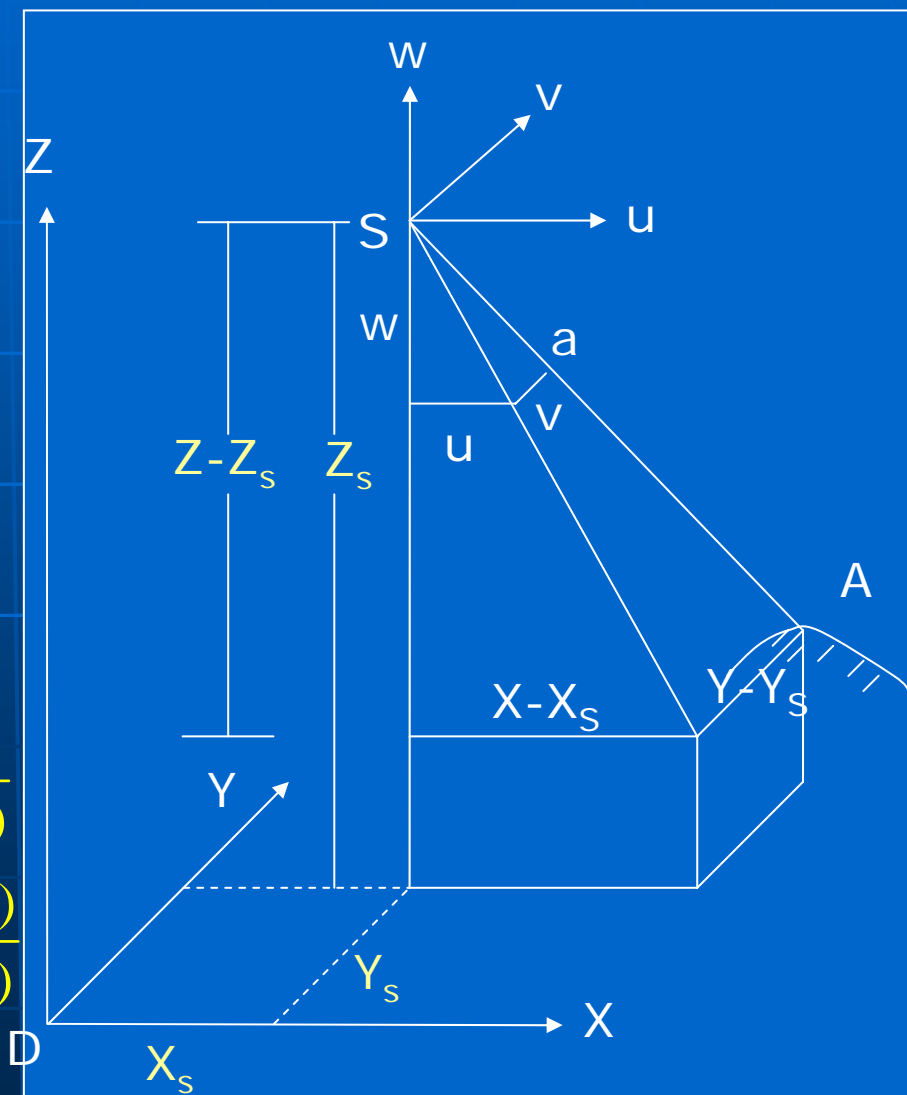
坐标轴：视需要而定（怎样取？）

相应轴系与 $D-XYZ$ 彼此平行
则存在如下关系：

$$\frac{u}{X - X_s} = \frac{v}{Y - Y_s} = \frac{w}{Z - Z_s} = \frac{1}{\lambda}$$

$$x = -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$

$$y = -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$



前方交会：需要建立适当的像空间辅助坐标系，建立的像空间辅助坐标系要方便实现由像方向物方的转换

坐标系怎样建？

➤左片像空间辅助坐标系 $S_1 - u_1 v_1 w_1$ 与地面摄影测量坐标系 $D - XYZ$ 相应轴平行

➤右片像空间辅助坐标系 $S_2 - u_2 v_2 w_2$ 与地面摄影测量坐标系 $D - XYZ$ 相应轴平行

方便实现由像方向物方的转换？

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

后方交会 → 外方位元素

像空间坐标系转换到
像空间辅助坐标系

坐标平移

转换到地面摄影测量坐标系

$$X_A = X_{S1} + U_1$$

$$Y_A = Y_{S1} + V_1$$

$$Z_A = Z_{S1} + W_1$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = R_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = R_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \cos \phi \cos \kappa - \sin \phi \sin \omega \sin \kappa \cdots$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{bmatrix} = N_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{bmatrix} = N_2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

➤1、连续像对相对定向元素：以左片为基准，右片相对于左片的相对方位元素

■ 像空间辅助坐标系的选取： $S_1 - u_1 v_1 w_1$ 左片的像空间坐标系

$S_2 - u_2 v_2 w_2$ 与 $S_1 - u_1 v_1 w_1$ 相应坐标轴平行

左、右片相对方位元素(相对同一像

空间辅助坐标系 $S_1 - u_1 v_1 w_1$)

左像片

$$X_{S1} = 0, Y_{S1} = 0, Z_{S1} = 0$$

$$\varphi_1 = 0, \omega_1 = 0, \kappa_1 = 0$$

右像片

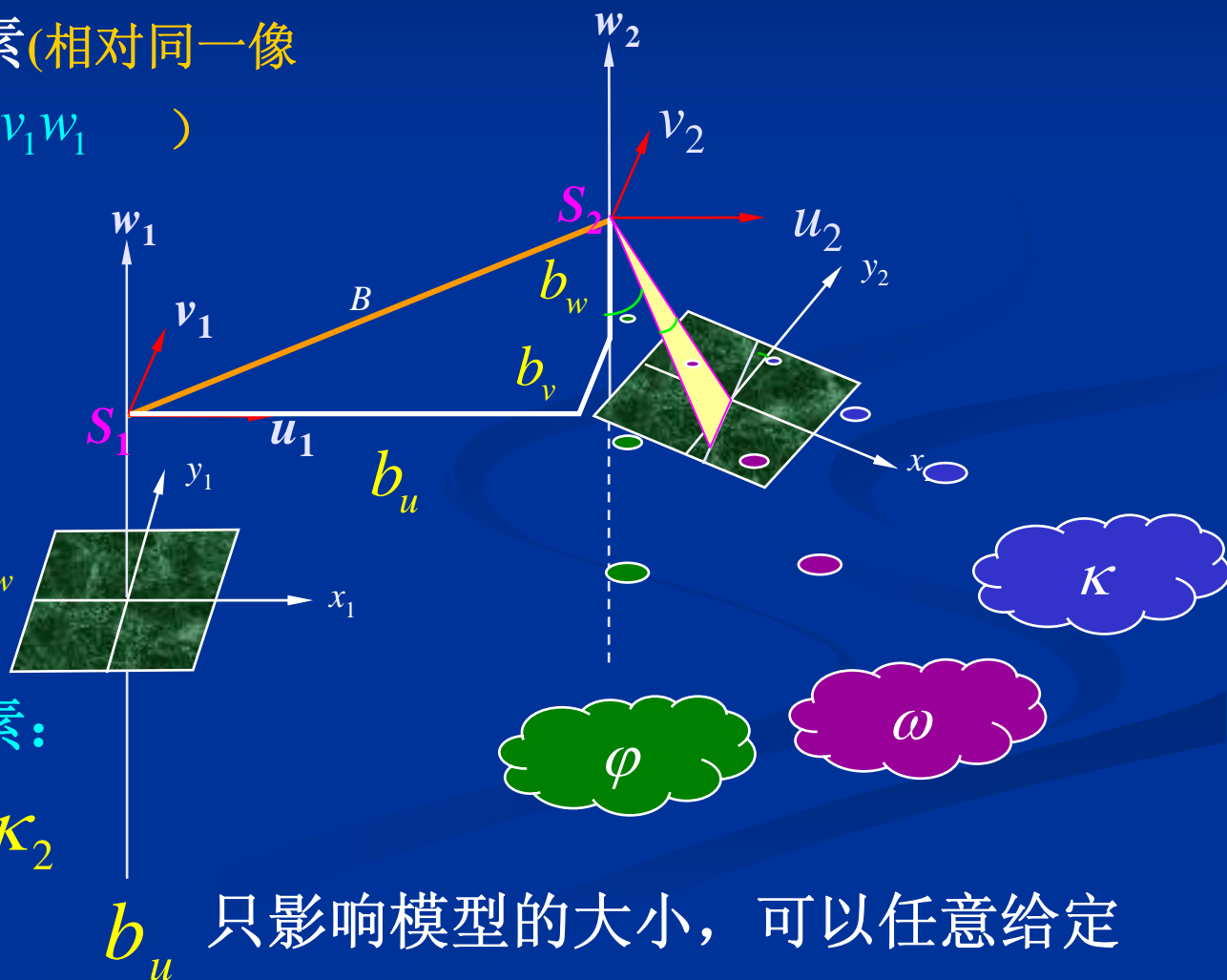
$$X_{S2} = b_u, Y_{S2} = b_v, Z_{S2} = b_w$$

$$\varphi_2, \omega_2, \kappa_2$$

连续像对相对定向元素：

$$b_v, b_w, \varphi_2, \omega_2, \kappa_2$$

b_u 只影响模型的大小，可以任意给定



➤ 2、单独像对相对定向元素:

像空间辅助坐标系 $S_1-u_1v_1w_1$ 的选取:

u轴: 摄影基线

v轴: 垂直于左片的主核面

w轴: 在左片的主核面内

左、右片相对方位元素
相对同一像空间辅助坐标系

左像片 $S_1-u_1v_1w_1$

$$X_{S1}=0, Y_{S1}=0, Z_{S1}=0$$

$$\varphi_1, \omega_1=0, \kappa_1$$

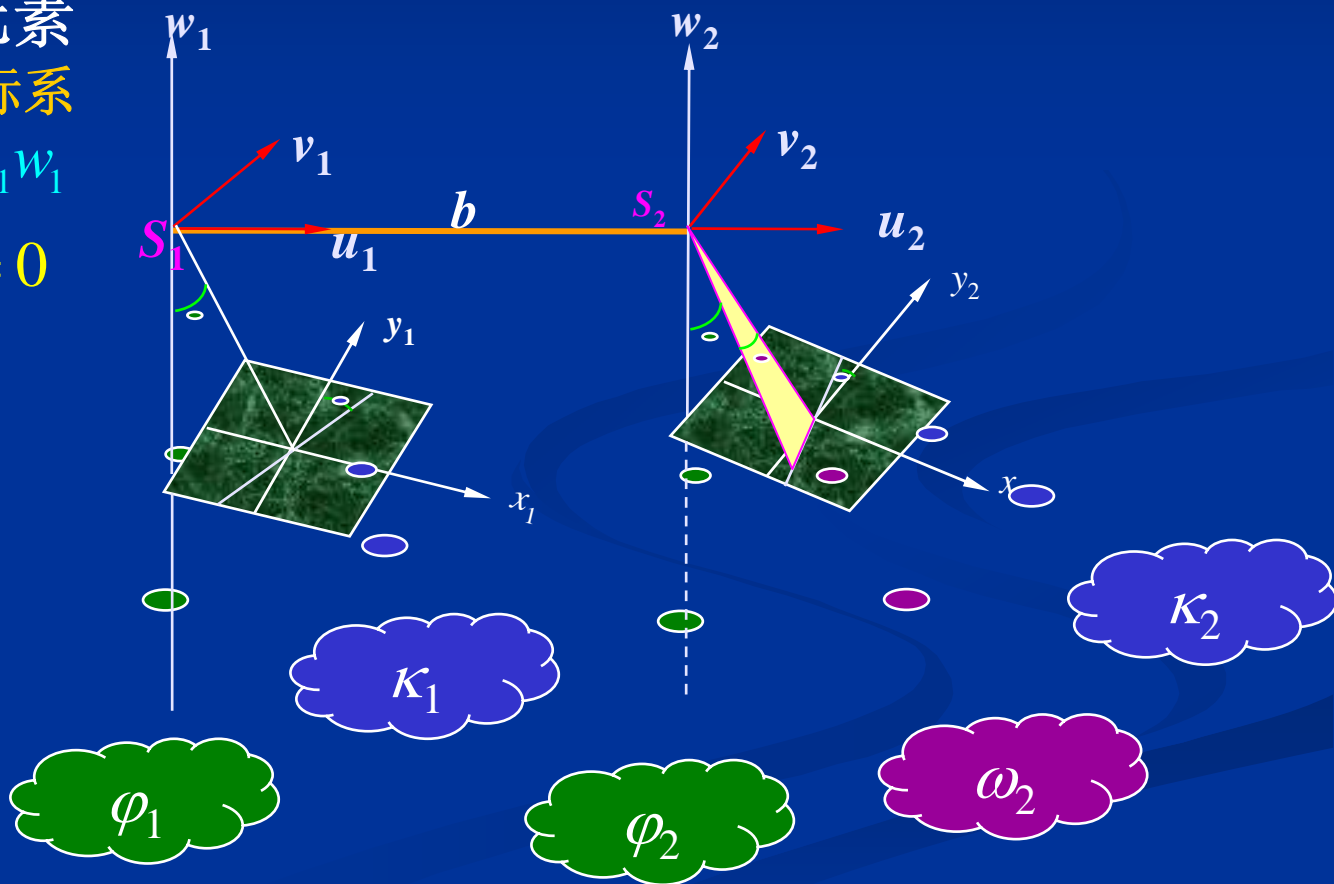
右像片

$$X_{S2}=b_u=b,$$

$$Y_{S2}=b_v=0,$$

$$Z_{S2}=b_w=0$$

$$\varphi_2, \omega_2, \kappa_2$$

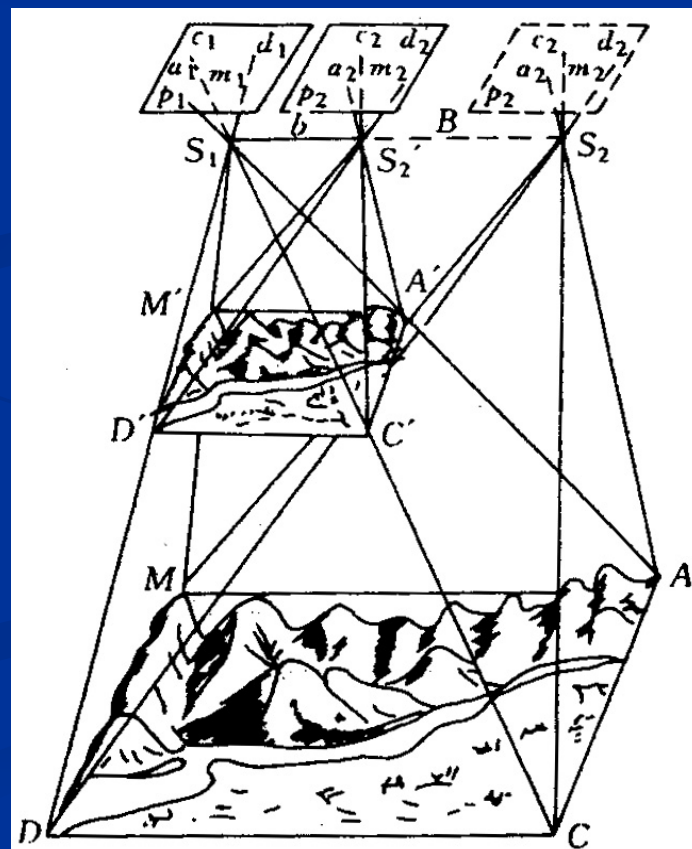
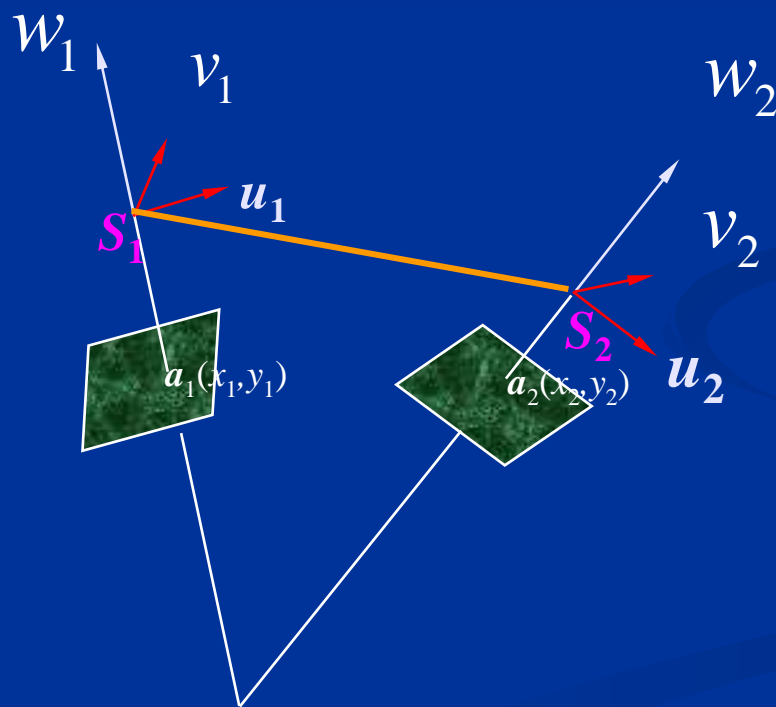


单独像对相对定向元素: $\varphi_1, \kappa_1, \varphi_2, \omega_2, \kappa_2$

相对定向

- 目的：建立地面立体模型
- 恢复两张像片的相对位置和姿态
- 同名光线对对相交

解析法相对定向：通过计算相对定向元素建立地面立体模型



■ 二、解析法相对定向原理

- ✓ 解求相对定向元素，建立立体模型
- ✓ 特征：恢复两张像片的相对位置，同名射线对对相交

数学模型描述：同名射线对对相交

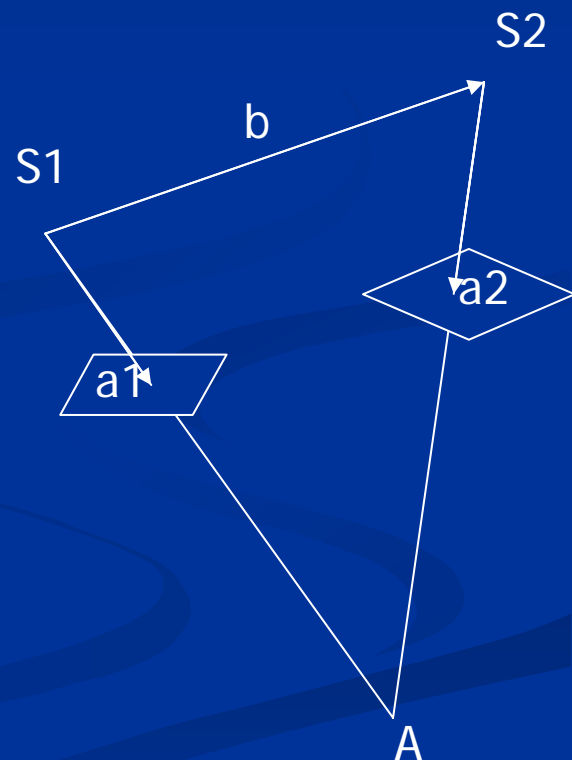
数学描述：三射线共面 $\overrightarrow{S_1S_2}$ 、 $\overrightarrow{S_1a_1}$ 、 $\overrightarrow{S_2a_2}$

三矢量共面，混合积为零

$$\overrightarrow{S_1S_2} \bullet (\overrightarrow{S_1a_1} \times \overrightarrow{S_2a_2}) = 0$$



共面条件方程式



连续法解析相对定向原理

连续像对法相对定向元素

$$b_u, b_v, b_w, \varphi_2, \omega_2, \kappa_2$$

$$\overrightarrow{S_1 S_2} \bullet (\overrightarrow{S_1 a_1} \times \overrightarrow{S_2 a_2}) = 0$$

共面条件方程坐标式

$$\begin{vmatrix} b_u & b_v & b_w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix}$$

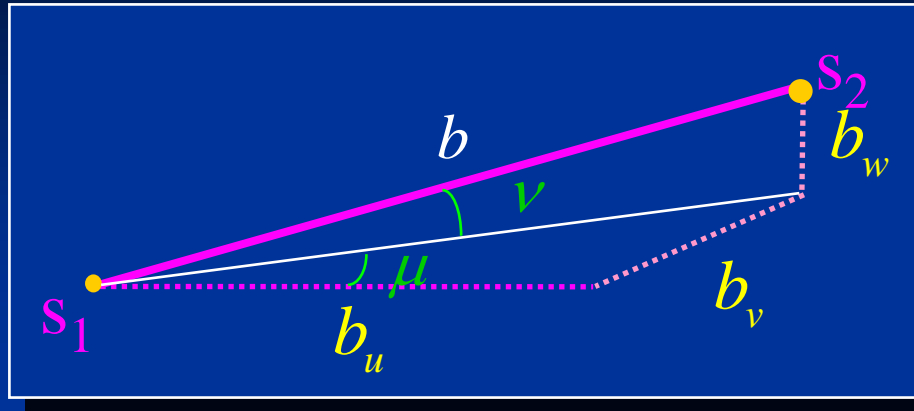
b_u 只影响模型比例尺

b_v, b_w ? 待求

$\varphi_2, \omega_2, \kappa_2$
的函数

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix}$$

都化为角度形式:



$$b_v = b_u \cdot \tan \mu \approx b_u \cdot \mu$$

$$b_w = \frac{b_u}{\cos \mu} \cdot \tan \gamma \approx b_u \cdot \gamma$$

$$\begin{vmatrix} b_u & b_v & b_w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$F = b_u \begin{vmatrix} 1 & \mu & \gamma \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

非线性函数，线性化，按泰勒级数展开，取小值一次项

$$F = F_0 + \frac{\partial F}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial F}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} d\varphi_2 + \frac{\partial F}{\partial \omega_2} d\omega_2 + \frac{\partial F}{\partial \kappa_2} d\kappa_2 = 0$$

F_0 : 相对定向元素的近似值及给定的 b_u 带入得到的函数 F 的近似值

$d\mu$ 、 $d\gamma$ 、 $d\varphi_2$ 、 $d\omega_2$ 、 $d\kappa_2$: 相对定向元素近似值的改正数

$\frac{\partial F}{\partial \mu} \dots \frac{\partial F}{\partial \kappa_2}$: 偏导数，系数

为简便计算，当 φ 、 ω 、 κ 为小值时，略去二次项得近似式）：

$$\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} = ? \\ \cos \varphi \approx 1 \\ \sin \varphi \approx \varphi \end{array} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\kappa_2 & -\varphi_2 \\ \kappa_2 & 1 & -\omega_2 \\ \varphi_2 & \omega_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix}$$

$$F = b_u \begin{vmatrix} 1 & \mu & \gamma \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_2} = b_u \begin{vmatrix} 1 & \mu & \gamma \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial v_2}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial w_2}{\partial \varphi_2} \end{vmatrix} = b_u \begin{vmatrix} 1 & \mu & \gamma \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ f & 0 & x_2 \end{vmatrix}$$

系数项（偏倒数）带入

$$b_u \begin{vmatrix} 1 & \mu & \gamma \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ f & 0 & x_2 \end{vmatrix} d\varphi_2 + b_u \begin{vmatrix} 1 & \mu & \gamma \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ 0 & f & y_2 \end{vmatrix} d\omega_2 + b_u \begin{vmatrix} 1 & \mu & \gamma \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{vmatrix} d\kappa_2$$

$$+ b_u \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix} d\mu + b_x \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} d\gamma + F_0 = 0$$

略去二次小项，等式两边除以 b_u ，整理得

$$v_1 x_2 d\varphi_2 + (v_1 y_2 - w_1 f) d\omega_2 - x_2 w_1 d\kappa_2 + (w_1 u_2 - u_1 w_2) d\mu$$

$$+ (u_1 v_2 - u_2 v_1) d\gamma + \frac{F_0}{b_u} = 0$$

x_2 、 y_2 可用 u_2 、 v_2 取代

$$v_1 = v_2, w_1 = w_2$$

■ 做近似

$$w_1 u_2 - u_1 w_2 = -\frac{b_u}{N_2} w_1$$

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = \frac{b_u}{N_2} v_1$$

$$\text{令 } Q = \frac{F_0 N_2}{b_u w_1}$$

■ 整理得

$$Q = -\frac{u_2 v_2}{w_2} N_2 d\varphi_2 - (w_2 + \frac{v_2^2}{w_2}) N_2 d\omega_2 + u_2 N_2 d\kappa_2 + b_u d\mu - \frac{v_2}{w_2} b_u d\gamma$$

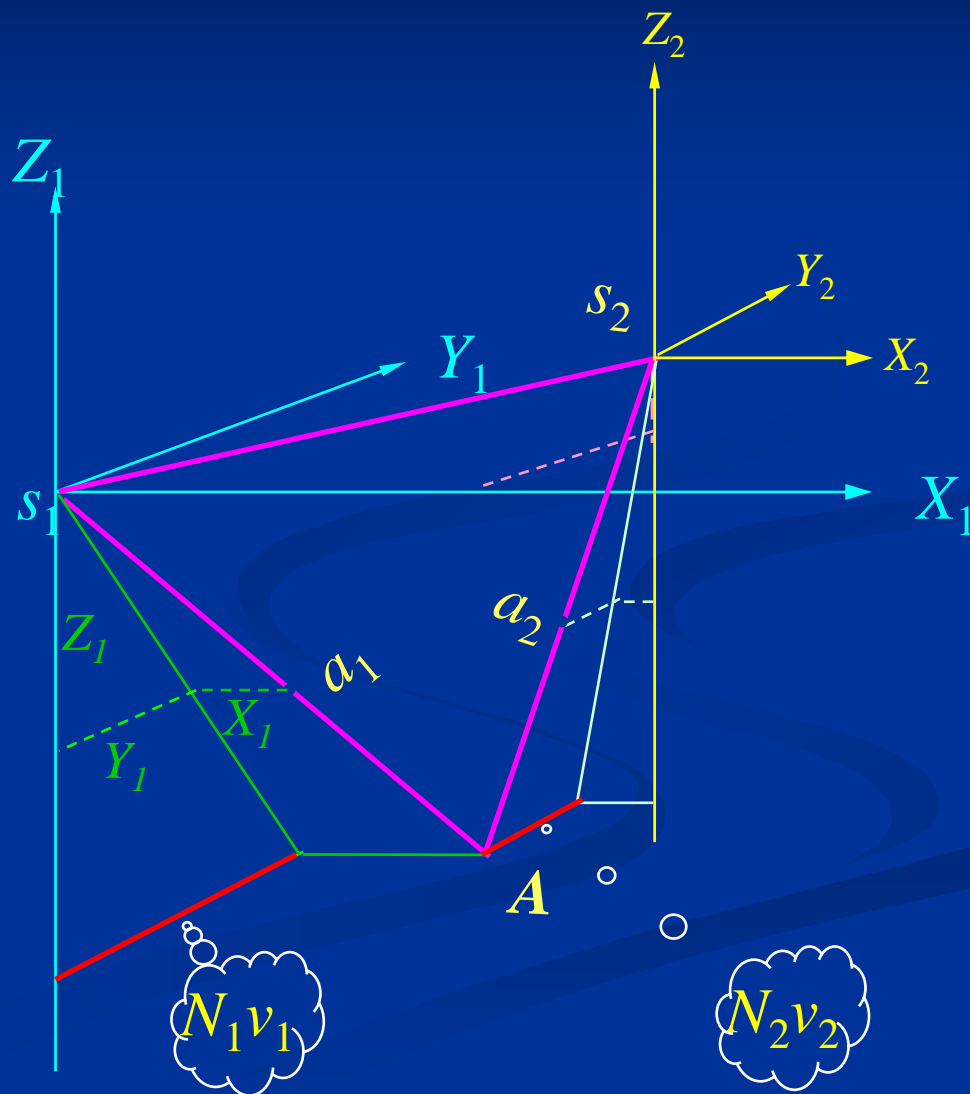
$$Q = \frac{F_0 N_2}{b_u w_1} = \frac{b_u w_2 - b_w u_2}{u_1 w_2 - u_2 w_1} v_1 - \frac{b_u w_1 - b_w u_1}{u_1 w_2 - u_2 w_1} v_2 - b_v = N_1 v_1 - N_2 v_2 - b_v$$

常数项的几何意义

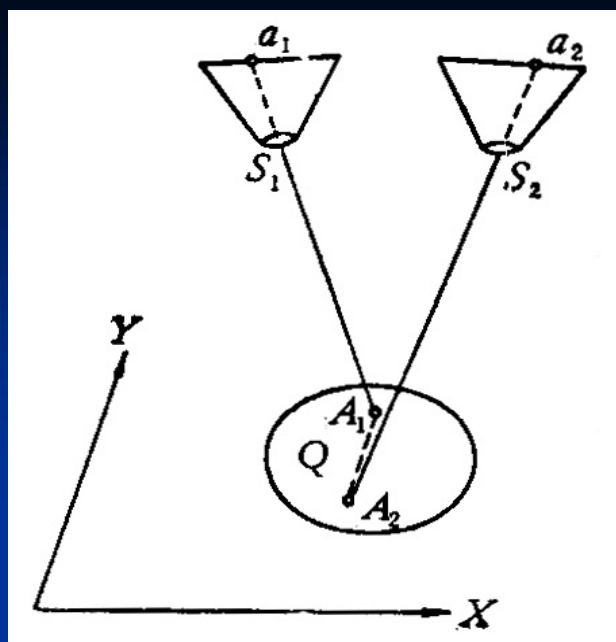
Q 为定向点上
模型上下视差

当一个立体像
对完成相对定
向， $Q=0$

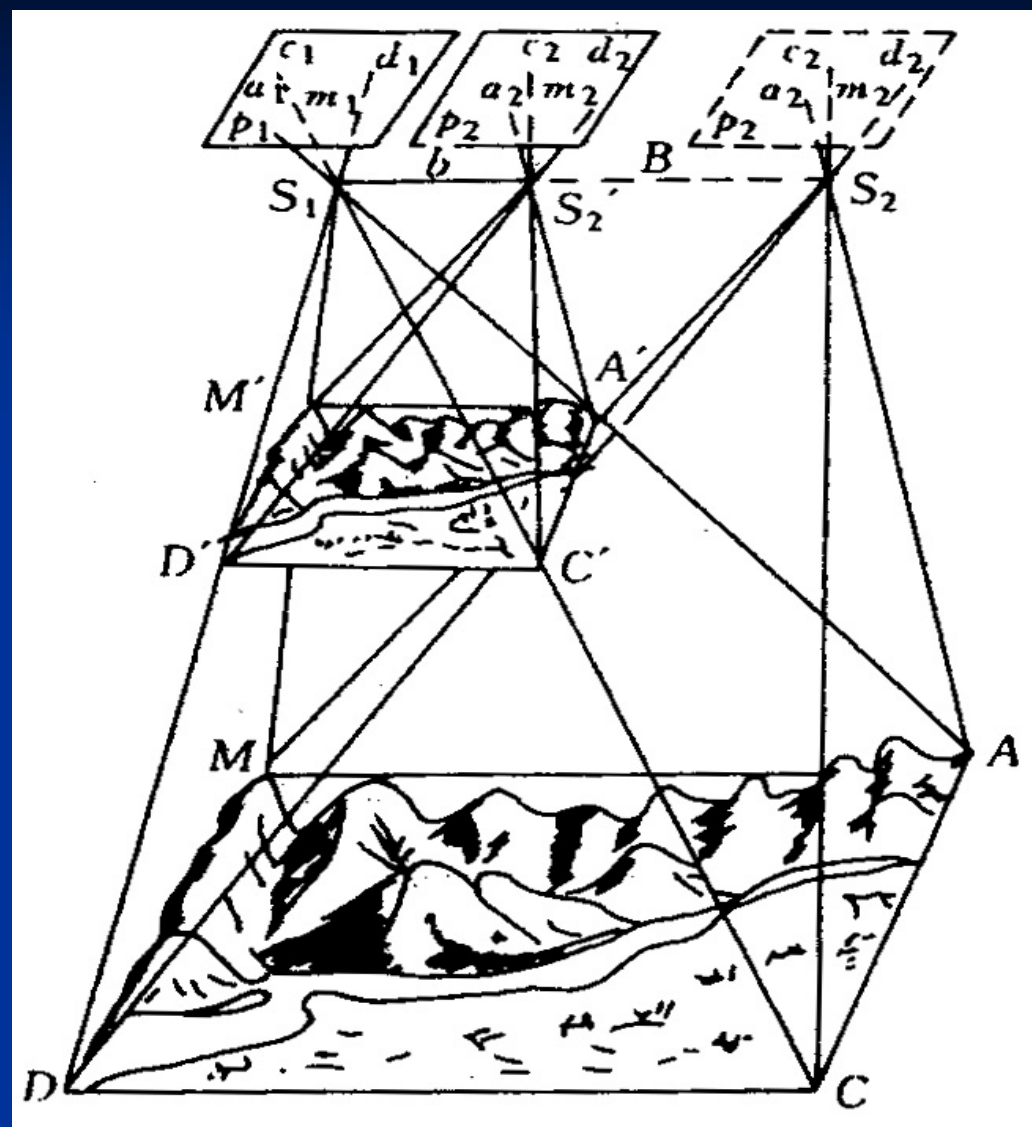
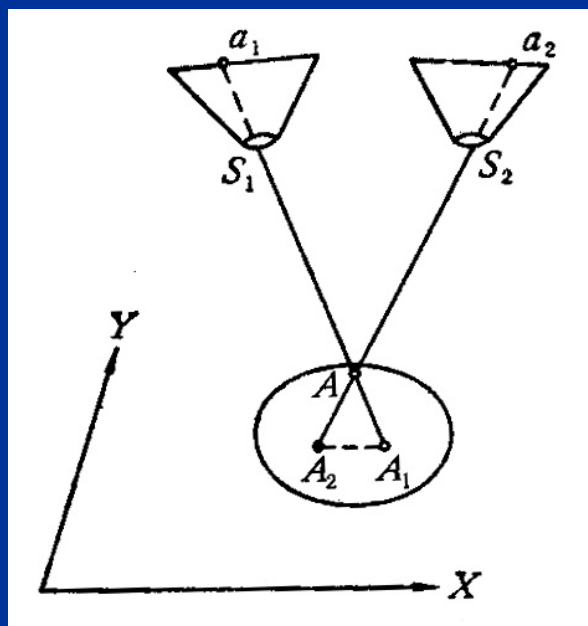
当一个立体像
对未完成相对
定向，即同名
光线不相交，
 $Q \neq 0$



同名光线不相交



同名光线对对相交



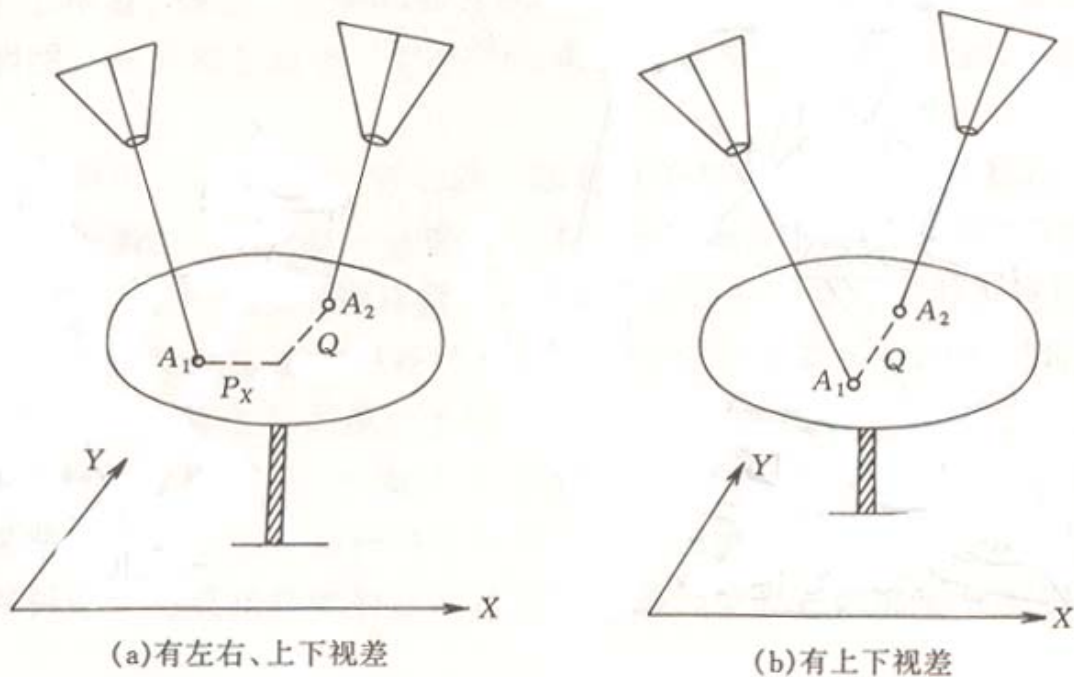


图 4-3 同名光线不相交

相对定向完成 → 建立像对的立体几何模型 ← 同名光线对对相交

相对定向
元素

模型点上下视差为0

视Q为观测值，列误差方程：

$$V_Q = -\frac{u_2 v_2}{w_2} N_2 d\varphi_2 - (w_2 + \frac{v_2^2}{w_2}) N_2 d\omega_2 + u_2 N_2 d\kappa_2 + b_u d\mu - \frac{v_2}{w_2} b_u d\gamma - Q$$

$$V_Q = d_{b_v} + \frac{y'}{f} d_{b_w} + \frac{x'y'}{f} d_{\varphi_2} + (f + \frac{y'^2}{f}) d_{\omega_2} + x' d_{\kappa_2} - Q$$

$$V = AX - l \quad V = [a \ b \ c \ d \ e] \begin{bmatrix} d\varphi_2 \\ d\omega_2 \\ d\kappa_2 \\ d\mu \\ d\gamma \end{bmatrix} - l \quad V = [V_{Q_1} \ V_{Q_2} \ \cdots \ V_{Q_n}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n & e_n \end{bmatrix} \quad X = [d\varphi_2 \ d\omega_2 \ d\kappa_2 \ d\mu \ d\gamma]^T \quad L = [l_1 \ l_2 \ \cdots \ l_n]^T$$

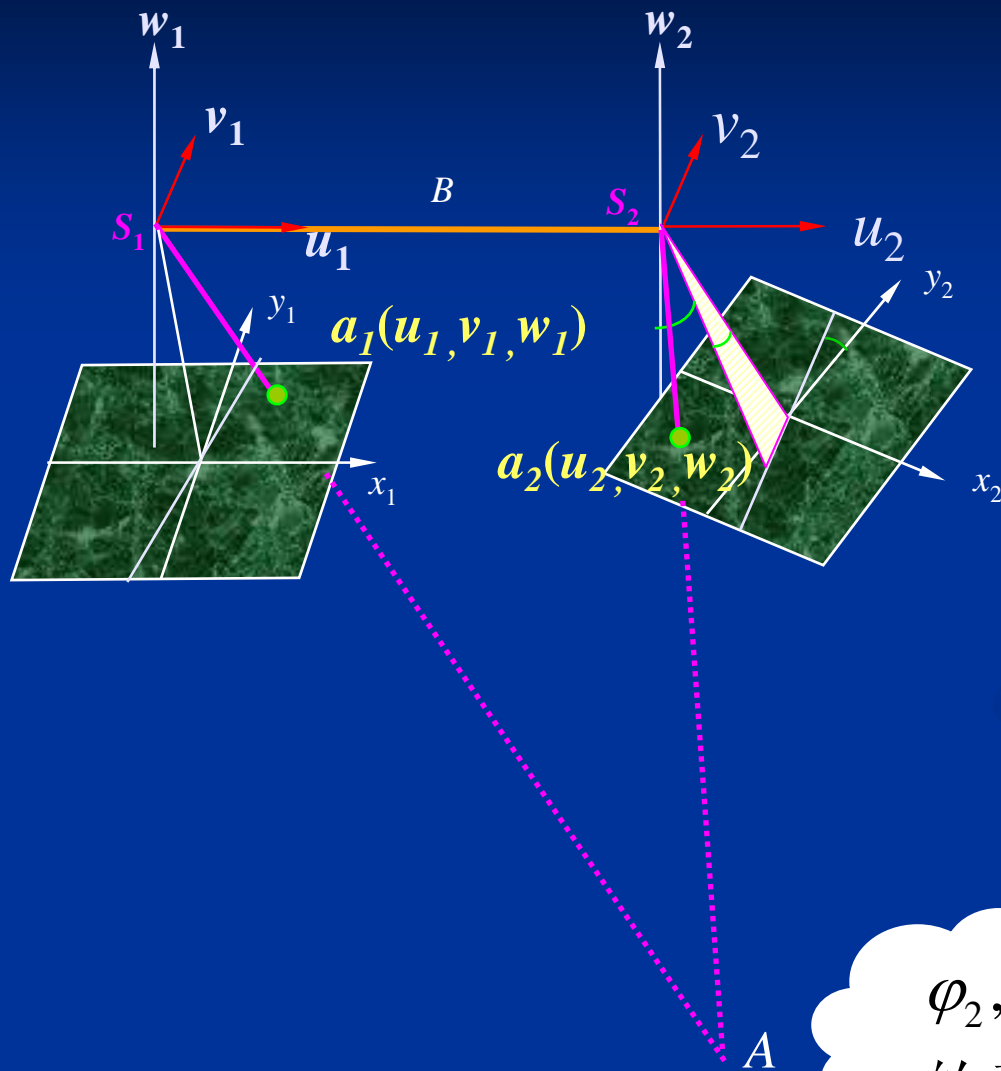
法方程

$$(A^T P A) X = A^T P L$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

迭代运算

单独法解析相对定向原理



φ_1, κ_1
的函数

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

$\varphi_2, \omega_2, \kappa_2$
的函数

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix}$$

单独像对的相对定向 φ_1 、 κ_1 、 φ_2 、 ω_2 、 κ_2

误差方程:
$$V_Q = \frac{u_1 v_2}{w_2} d\varphi_1 - \frac{u_2 v_1}{w_1} d\varphi_2 + f(1 + \frac{v_1 v_2}{w_1 w_2}) d\omega_2 + \frac{u_1}{w_1} d\kappa_1 - \frac{u_2}{w_2} d\kappa_2 - Q$$

$$Q = -f \frac{v_1}{w_1} + f \frac{v_2}{w_2}$$

相对定向:

- 特点: 不考虑模型的比例尺, 不需要野外控制点
- 连续像对法相对定向的特征: 前一像对右像片的相对定向角元素, 对后一像对而言, 是左像片的角元素, 已成为已知值。适用于航带
- 单独像对法相对定向适用于单模型

■ 三、相对定向元素的计算过程

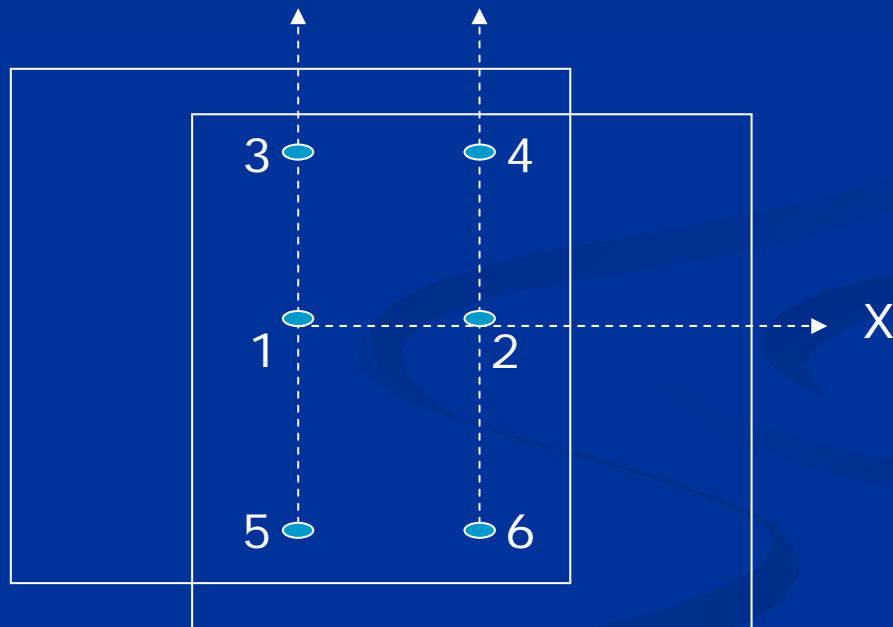
定向点：同名像点（明显点）

六个标准点位

1、2点：左、右片的像主点

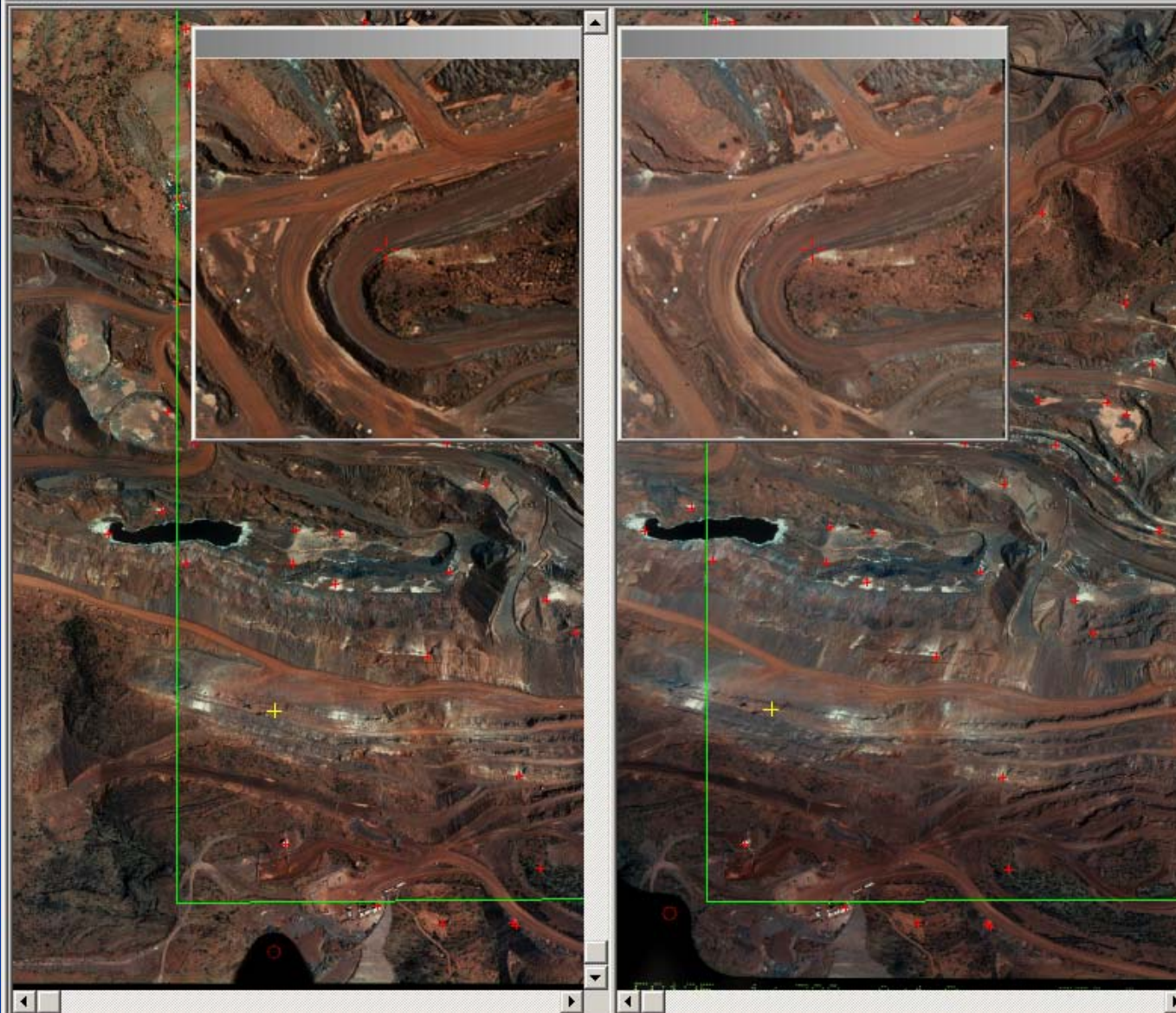
3、5点： $X=0$ ， Y 值最大

4、6点： $X=b$ ， Y 值最大



相对定向标准点位

相对定向



定向结果

kappa[1] -0.0106
kappa[2] -0.0059
omega[2] -0.0008
phi[1] 0.0001
phi[2] 0.0098

101.....-0.025
22.....-0.025
123.....-0.026
6156.....-0.028
2156.....-0.034
1156.....-0.121

RMS : 0.0162

点数: 156

删除点



左影像

向上

右影像

向左

向下

向右

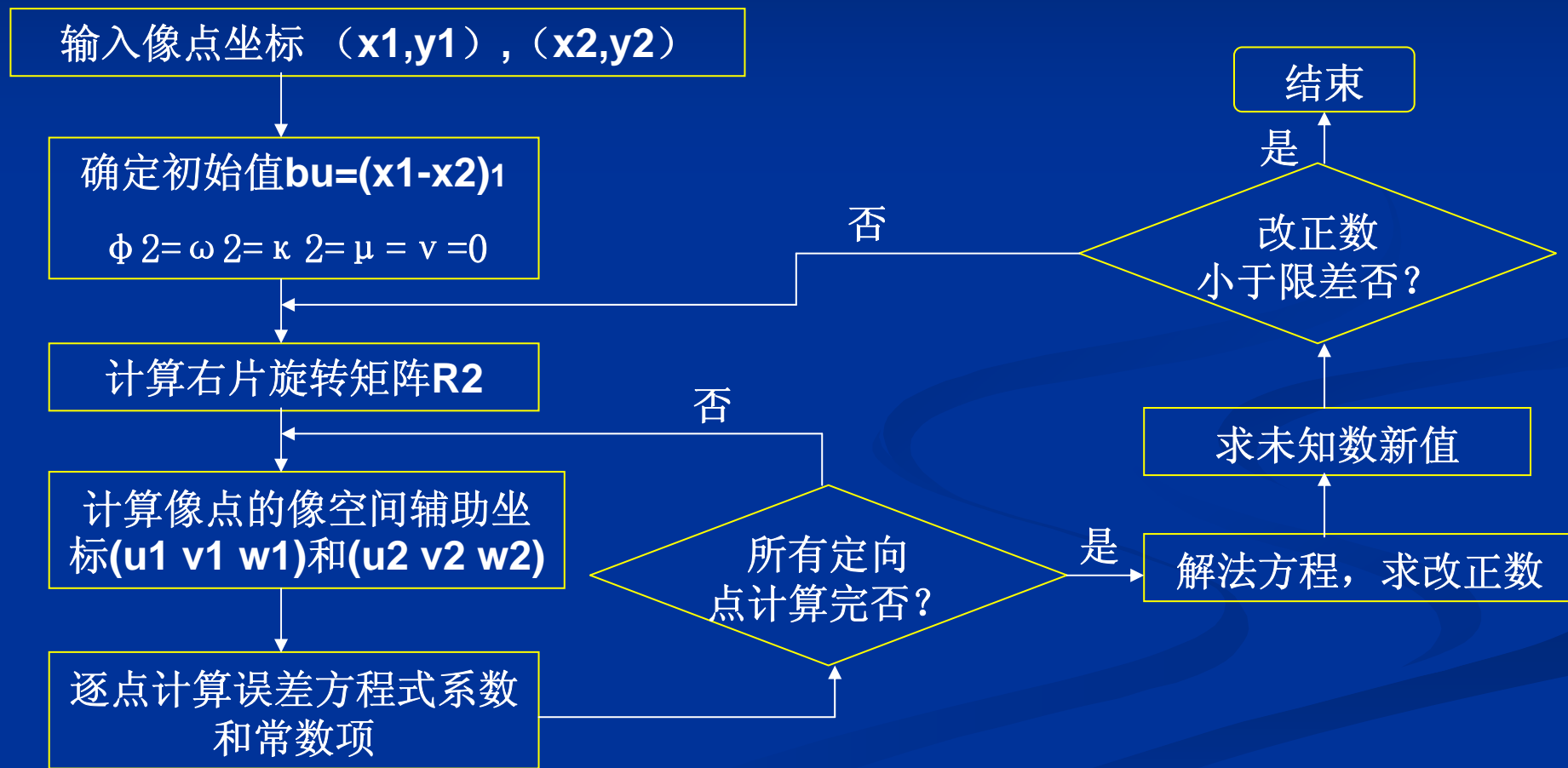
开始

VirtuoZoNT 3.5.0

相对定向

3D CH 15:16

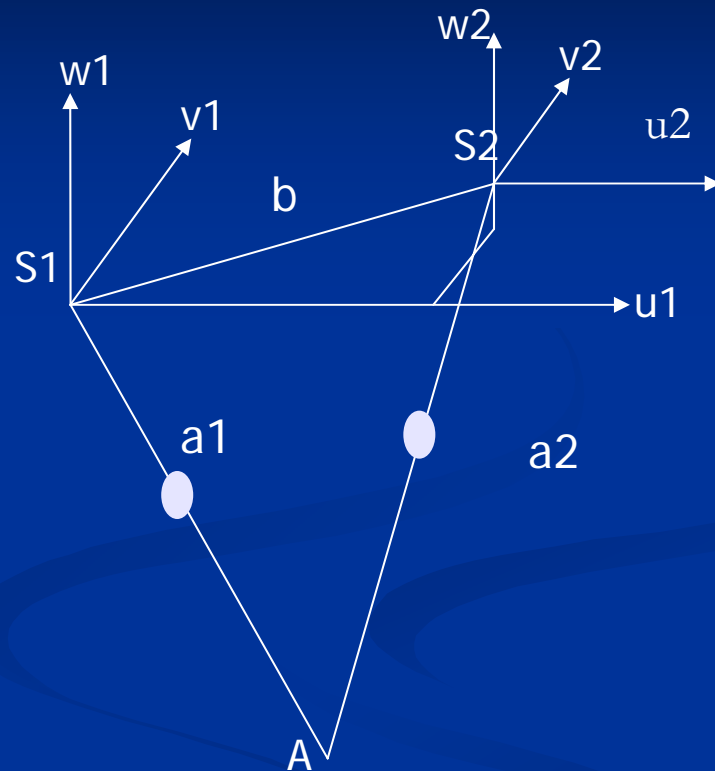
计算框图：以连续像对的相对定向为例



四、模型点坐标的计算（模型点在像空间辅助坐标系坐标）

解出相对定向元素后，只能求出像点在像空间辅助坐标系中的坐标

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = R_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix}$$



模型点在像空间辅助坐标系坐标

$$U_1 = N_1 u_1 = b_u + N_2 u_2$$

$$V_1 = N_1 v_1 = b_v + N_2 v_2$$

$$W_1 = N_1 w_1 = b_w + N_2 w_2$$

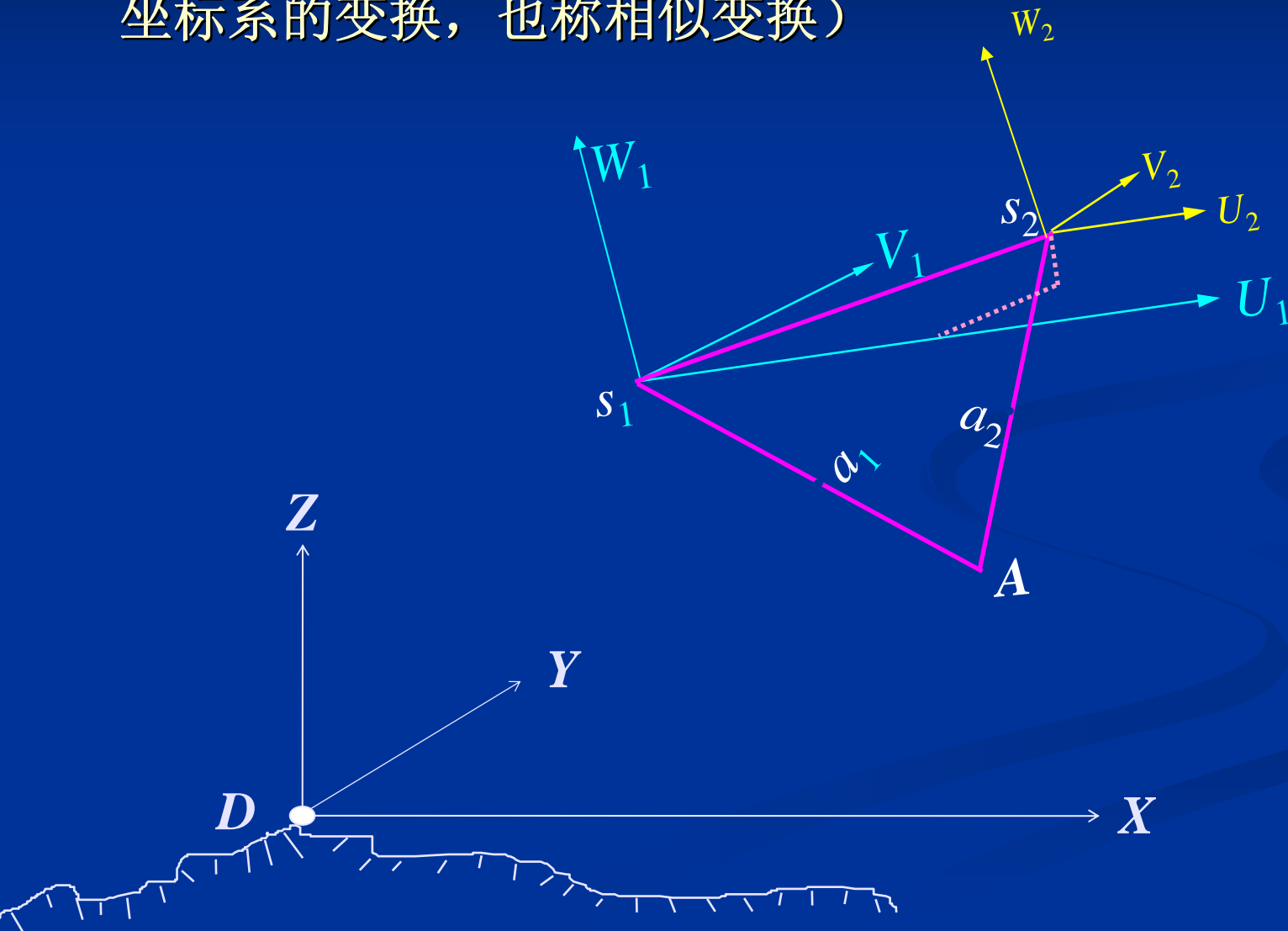
投影系数:

$$N_1 = \frac{b_u w_2 - b_w u_2}{u_1 w_2 - u_2 w_1}$$

$$N_2 = \frac{b_u w_1 - b_w u_1}{u_1 w_2 - u_2 w_1}$$

§ 5—5 解析法绝对定向

- 一、绝对定向：相对定向后得到模型点在像空间辅助坐标系中的坐标 (U, V, W) \longrightarrow 地面摄影测量坐标 (X, Y, Z) (两空间坐标系的变换，也称相似变换)



基本关系式:

地面点在地面
摄影测量坐标
系中坐标

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix}$$

Φ 、 Ω 、 K
计算的方向余弦

坐标原点的
平移量

模型比例尺
缩放系数

模型点在像空间辅
助坐标系中的坐标

七个绝对定向元素 λ 、 Φ 、 Ω 、 K 、 X_s 、 Y_s 、 Z_s

解析法绝对定向: 利用已知的地面控制点, 解求绝对定向元素

■ 二、绝对定向元素的计算

解算思路：多余观测，平差方法计算

线性化 → 列误差方程 → 组成法方程 → 解法方程（迭代运算）

$$F = F_0 + \frac{\partial F}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial F}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial F}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial F}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial F}{\partial Z_s} dZ_s$$

视U、V、W为观测值

$$- \begin{bmatrix} V_U \\ V_V \\ V_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & U & -W & 0 & -V \\ 0 & 1 & 0 & V & 0 & -W & U \\ 0 & 0 & 1 & W & U & V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_s \\ dY_s \\ dZ_s \\ d\lambda \\ d\Phi \\ d\Omega \\ dK \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_U \\ l_V \\ l_W \end{bmatrix}$$

控制点坐标

绝对定向元素初值带
入计算的近似值

$$\begin{bmatrix} l_U \\ l_V \\ l_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \lambda_0 R_0 \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{S_0} \\ Y_{S_0} \\ Z_{S_0} \end{bmatrix}$$

误差方程矩阵式: $V = AX - L$

式中 $X = [dX_s \ dY_s \ dZ_s \ d\lambda \ d\Phi \ d\Omega \ dK]^T$

法方程: $(A^T PA)X = A^T PL$

解法方程: $X = (A^T A)^{-1} A^T L$

迭代运算:

$$X_s = X_{s_0} + dX_{s_1} + dX_{s_2} + dX_{s_3} + \dots$$

$$Y_s = Y_{s_0} + dY_{s_1} + dY_{s_2} + dY_{s_3} + \dots$$

$$Z_s = Z_{s_0} + dZ_{s_1} + dZ_{s_2} + dZ_{s_3} + \dots$$

$$\lambda_i = \lambda_{i-1}(1 + d\lambda_i)$$

$$\Phi = \Phi_0 + d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3 + \dots$$

$$\Omega = \Omega_0 + d\Omega_1 + d\Omega_2 + d\Omega_3 + \dots$$

$$K = K_0 + dK_1 + dK_2 + dK_3 + \dots$$

解得绝对定向元素后可以解得加密点的坐标

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix}$$

控制点的数量与分布

- ✓至少需要两个平高点和一个高程点
- ✓三个控制点不能在一条直线上
- ✓模型的四个角布设4个控制点

三、实际计算中要解决的问题：

■1、将地面坐标转换为地面摄影测量坐标

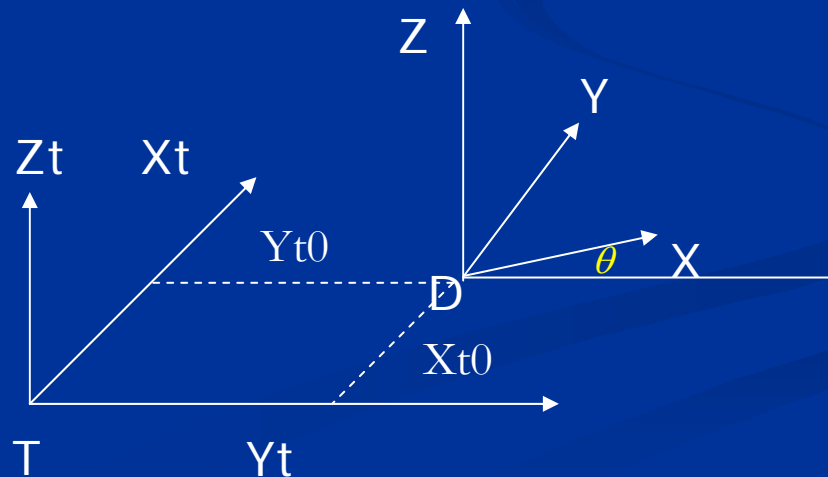
✓提供的控制点坐标 (X_t, Y_t, Z_t) (左手系)

相对定向后得到的像空间辅助坐标坐标 (U, V, W) (右手系)

✓ 存在的问题：旋角很大

✓ 解决途径：先将控制点的坐标向地面摄影测量坐标系转换

控制点
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t - X_{t0} \\ Y_t - Y_{t0} \\ Z_t \end{bmatrix}$$



通过控制点解两个参数 令 $a = \lambda \sin \theta$, $b = \lambda \cos \theta$, $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$a = \frac{\Delta U \cdot \Delta X_t - \Delta V \cdot \Delta Y_t}{\Delta X_t^2 + \Delta Y_t^2}$$

$$b = \frac{\Delta U \cdot \Delta Y_t + \Delta V \cdot \Delta X_t}{\Delta X_t^2 + \Delta Y_t^2}$$

地面摄影测量坐标系的x轴
与像空间辅助坐标系的u轴
相一致，且两坐标系单位长
度相同

绝对定向后加密点的坐标应反算到地面测量坐标系 $T-X_t Y_t Z_t$

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda^2} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{t0} \\ Y_{t0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

■ 2、重心化问题:

- ✓ 原因: 误差方程的系数项是模型点的坐标 (坐标系原点在模型的左侧, 有些点坐标数值较大), 重心化可以减小坐标数值, 简便计算
- 减少有效位数, 保证计算精度
- 法方程系数减化, 个别项数值为零, 提高计算速度
- ✓ 重心坐标: 控制点的算术平均值

控制点的重心坐标:

$$X_g = \frac{\sum_{i=1}^n X}{n}, \quad Y_g = \frac{\sum_{i=1}^n Y}{n}, \quad Z_g = \frac{\sum_{i=1}^n Z}{n}$$

模型点的重心坐标:

$$U_g = \frac{\sum_{i=1}^n U}{n}, \quad V_g = \frac{\sum_{i=1}^n V}{n}, \quad W_g = \frac{\sum_{i=1}^n W}{n}$$

✓ 重心化坐标:

$$\bar{X} = X - X_g$$

$$\bar{U} = U - U_g$$

控制点

$$\bar{Y} = Y - Y_g$$

模型点

$$\bar{V} = V - V_g$$

$$\bar{Z} = Z - Z_g$$

$$\bar{W} = W - W_g$$

坐标重心化后绝对定向基本公式

$$\begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix} = \lambda R \begin{bmatrix} \overline{U} \\ \overline{V} \\ \overline{W} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

重心化后的误差方程式

$$- \begin{bmatrix} V_U \\ V_V \\ V_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \overline{U} & -\overline{W} & 0 & -\overline{V} \\ 0 & 1 & 0 & \overline{V} & 0 & -\overline{W} & \overline{U} \\ 0 & 0 & 1 & \overline{W} & \overline{U} & \overline{V} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \\ d\lambda \\ d\Phi \\ d\Omega \\ dK \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_U \\ l_V \\ l_W \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_U \\ l_V \\ l_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix} - \lambda_0 R_0 \begin{bmatrix} \overline{U} \\ \overline{V} \\ \overline{W} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix}$$

四、双像解析的相对定向——绝对定向法

- 相对定向——绝对定向法
- ✓ 先相对定向：通过解算五个相对定向元素 → 模型点在像空间辅助坐标系中的坐标
- ✓ 再绝对定向：通过解算七个绝对定向元素 → 把模型点在像空间辅助坐标系中的坐标纳入地面（摄影）测量坐标系

$$F = \begin{vmatrix} b_u & b_v & b_w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix}$$

相对定向：5 个元素

绝对定向：7 个元素

12



两张像片的外方位元素 $6+6$

通过相对定向+绝对定向
也能够恢复两张影像的外方位元素

§ 5—6 双像解析的光束法严密解

- 思想：未知点、控制点都列立共线条件方程式，整个区域同时解求
- ✓ 两张像片的外方位元素
- ✓ 加密点的地面坐标

数学描述

$$x = -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$

$$y = -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$

线性化

$$x = (x) + \frac{\partial x}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial x}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial x}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial x}{\partial \kappa} d\kappa + \frac{\partial x}{\partial X} dX + \frac{\partial x}{\partial Y} dY + \frac{\partial x}{\partial Z} dZ$$

$$y = (y) + \frac{\partial y}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial y}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial y}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial y}{\partial \kappa} d\kappa + \frac{\partial y}{\partial X} dX + \frac{\partial y}{\partial Y} dY + \frac{\partial y}{\partial Z} dZ$$

误差方程式矩阵形式（以像点坐标为观测值）

$$V_x = a_{11}dX_s + a_{12}dY_s + a_{13}dZ_s + a_{14}d\varphi + a_{15}d\omega + a_{16}d\kappa - a_{11}dX - a_{12}dY - a_{13}dZ + (x) - x$$

$$V_y = a_{21}dX_s + a_{22}dY_s + a_{23}dZ_s + a_{24}d\varphi + a_{25}d\omega + a_{26}d\kappa - a_{21}dX - a_{22}dY - a_{23}dZ + (y) - y$$

要解的未知数（4个平高控制点，n个加密点）

✓两张像片的外方位元素12个

✓加密点坐标 3n个

误差方程式的个数： $2 \times (8+2n)$

将未知数分成两类：

$$V = [A \quad B] \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} - L \quad V = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}^T \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix}$$

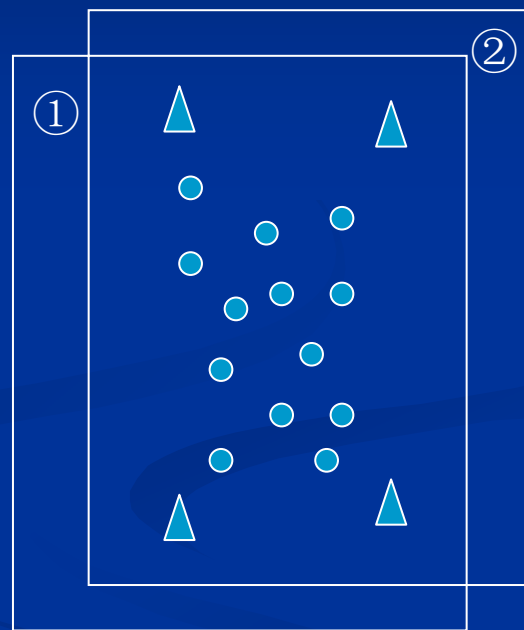
$$t = [dX_s \ dY_s \ dZ_s \ d\varphi \ d\omega \ d\kappa]^T \quad B = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}$$

$$X = [dX \ dY \ dZ]^T \quad L = \begin{bmatrix} l_x & l_y \end{bmatrix}^T$$

相应的法方程式

$$\begin{bmatrix} A^T A & A^T B \\ B^T A & B^T B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T L \\ B^T L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



- 为计算方便，可消去一类未知数，得到改化法方程（消去 \mathbf{x} ）

$$(N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{12}^T)t = (u_1 - N_{12}N_{22}^{-1}u_2)$$

另一组改化法方程

$$(N_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12})X = (u_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} u_1)$$

迭代运算：满足精度为止

如何确定待求未知数的初始值？

外方位元素：单像空间后方交会

加密点坐标：前方交会

小结双像解析摄影测量的方法（利用一个像对获得地面的空间信息）

- 单像后方交会——双像前方交会法：
- ✓ 每张像片先进行后方交会 ——> 两张像片的内、外方位元素
- ✓ 空间前方交会 ——> 加密点的地面坐标

主要的数学公式

$$x - x_0 = -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$

$$y - y_0 = -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$

$$V_x = -\frac{f}{H} dX_s - \frac{x}{H} dZ_s - f(1 + \frac{x^2}{f^2}) d\varphi - \frac{xy}{f} d\omega + y d\kappa + (x) - x \quad X_A = X_{S1} + N_1 u_1 = X_{S2} + N_2 u_2$$

$$V_y = -\frac{f}{H} dY_s - \frac{yx}{H} dZ_s - \frac{xy}{f} d\varphi - f(1 + \frac{y^2}{f^2}) d\omega - x d\kappa + (y) - y \quad Y_A = Y_{S1} + N_1 v_1 = Y_{S2} + N_2 v_2$$
$$Z_A = Z_{S1} + N_1 w_1 = Z_{S2} + N_2 w_2$$

解算特点：

- ◆ 所需的控制点个数：（后方交会）每张像片至少需三个
- ◆ 是迭代运算过程，近似竖直摄影，能提供合适的初始值
- 问题：外方位元素较大且初始条件未知时，不能提供初始值
- 变通：不需要初始值的直接解
- ◆ 前交没有利用多余条件平差计算
- ◆ 适用于外方位元素已知、少量加密点

- 相对定向——绝对定向法
- ✓ 先相对定向：通过解算五个相对定向元素——→模型点在像空间辅助坐标系中的坐标
- ✓ 再绝对定向：通过解算七个绝对定向元素——→模型点在像空间辅助坐标系中的坐标纳入地面（摄影）测量坐标系

主要公式

$$F = \begin{vmatrix} b_u & b_v & b_w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix}$$

解算特点：

- ◆ 所需的控制点个数：两个平高点和一个高程点（绝对定向）
- ◆ 都是迭代过程，相对定向的初始值不容易确定时可采用直接解
- ◆ 不能严格表达外方位元素
- ◆ 适用于航带法解析空中三角测量

- 光束法：以共线条件方程式为基础，平差整体解求
- ✓ 两张像片的（内）、外方位元素
- ✓ 加密点的地面坐标

$$x = (x) + \frac{\partial x}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial x}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial x}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial x}{\partial \kappa} d\kappa + \frac{\partial x}{\partial X} dX + \frac{\partial x}{\partial Y} dY + \frac{\partial x}{\partial Z} dZ$$
$$y = (y) + \frac{\partial y}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial y}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial y}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial y}{\partial \kappa} d\kappa + \frac{\partial y}{\partial X} dX + \frac{\partial y}{\partial Y} dY + \frac{\partial y}{\partial Z} dZ$$

解算特点：

- ◆ 所需的控制点减少
- ◆ 理论严密
- ◆ 观测值是像点坐标，对系统误差反映最敏感，待定点坐标按最小二乘准则解得，精度最高
- ◆ 计算量较大
- ◆ 适用于加密点较多的情况下